コノルムの生成関数による連続ファジイ測度の構成

津村 拓朗, 本田 あおい, 岡崎 悦明

九州工業大学・情報工学部・システム創成情報工学科
Takuro TSUMURA, Aoi HONDA, Yoshiaki OKAZAKI,
Department of Systems Innovation and Informatics, Kyushu Institute of Technology

Abstract:We discuss about the construction of distorted probability which is generated by multiplicative or additive generating functions of t-conorms. We study a similar construction of a continuous distorted probability and give some examples of a continuous distorted probabilities generated by generationg functions of t-conorm.

1 はじめに

ファジィ測度は非加法的集合関数であり，加法性を持つ通常の測度では表現できないような項目間の相互作用を表現することができ，そのため主観的評価問題の分析や意思決定支援, パターン認識等さまざまな分野への応用が考えられている ([1][2][3][4][5]).

ファジィ測度を応用に適用する際には, その問題に適したファジィ測度のクラスを限定し, そのクラスを用いるのが普通である. これまでに λ-ファジィ測度, χ-ファジィ測度, 確率から導かれるファジィ測度等のクラスが提案されており, 種々の問題への適用が考えられている.

本論文では, 新たなファジィ測度のクラスの構成を目指して, t-コノルムを用いたファジィ測度の生成方法について考察する. 特に [6] で論じた離散ファジィ測度の生成方法を, 連続ファジィ測度の生成へと拡張する.

2 準備

本論文を通して，X を空でない集合, Σ を X の σ-集合体とする.

定義 1 ([2][8]) 集合関数 $g : \Sigma \to [0,\ 1]$ が次の条件を満たすとき, g をファジィ測度という.

1. $g(\emptyset) = 0,\ g(X) = 1$
2. 任意の $A, B \in \Sigma$ に対して $A \subset B$ ならば $g(A) \leq g(B)$

1 は有界性, 2 は単調性をあらわす.

定義 2 ファジィ測度 $g : \Sigma \to [0,\ 1]$ が, 任意の $A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \phi$ に対して

$$g(A \cup B) = g(A) + g(B) + \lambda g(A)g(B),$$

$$-1 < \lambda < \infty$$

を満たすとき, g を λ-ファジィ測度という.

λ-ファジィ測度は, 1つのパラメータで表現できる扱いやすい測度である. X が有限集合ならば, 1点集合の測度とパラメータが決まれば全体が決定される.

定義 3 集合関数 $g : \Sigma \to [0,\ 1]$ に対して, ある確率測度 $P(A)$ $(A \in \Sigma)$ と単調非減少関数 (scaling function)$f : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ が存在して, 任意の $A, B \in \Sigma$ に対して

$$g(A) = f \circ P(A)$$

が成り立つとき, g を確率から導かれるファジィ測度という.

確率から導かれるファジィ測度は確率測度 $P(A)$ を単調非減少関数で歪めた測度である. 加法性はもたないが, 確率測度の大小関係は残るので扱いやすいファジィ測度である. また f を自由に変えることができるので, ファジィ測度の広い部分をカバーできる.

定義 4 ファジィ測度 $g : \Sigma \to [0,\ 1]$ が, 任意の $A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \phi$ に対して

$$g(A \cup B) = \sqrt[p]{g(A)^p + g(B)^p + \lambda g(A)^p g(B)^p},$$

$$0 < p \leq \infty, -1 < \lambda < \infty$$

を満たすとき, g を (λ, p)-ファジィ測度という.

(λ, p)-ファジィ測度は, ２つのパラメータで表現されているので, λ ファジィ測度より, さらに高い精度で未知のファジィ測度を近似することが期待される.

定理 1 (λ, p)-ファジィ測度は, 確率から導かれるファジィ測度である.

証明

$$P(A) := \log_{(1+\lambda)}(1 + \lambda g(A)^p)$$

$$f(x) := \sqrt[p]{\frac{(1+\lambda)^x - 1}{\lambda}}$$

とおくと, 任意のの $A, B \in \Sigma$ に対して, $g(A) = f \circ P(A)$ が成り立つ.

3 t-ノルム, t-コノルム

定義 5 演算 $T : [0,\ 1] \times [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ が次の条件を満たすとき, これを t-ノルムとよぶ.

(T-1) $T(0,0) = 0$, $T(x,1) = x$ for $x > 0$
(T-2) $x \leq y$ ならば $T(x,z) \leq T(y,z)$
(T-3) $T(x,y) = T(y,x)$
(T-4) $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$

定義 6 演算 $S : [0,\ 1] \times [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ が次の条件を満たすとき, これを t-コノルムとよぶ.

(T-1') $S(1,1) = 1$, $S(x,0) = x$ for $x < 1$
(T-2) $x \leq y$ ならば $S(x,z) \leq S(y,z)$
(T-3) $S(x,y) = S(y,x)$
(T-4) $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$

定理 2 ([7]) T が厳密 (連続で狭義単調) な t-ノルムならば, $]0,\ 1]$ 上の連続で強単調減少な関数 φ, $\lim_{a\to 0+} \varphi(x) = +\infty$, $\varphi(1) = 0$, が存在して, 任意の $x, y \in [0,\ 1]$ に対して

$$T(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))$$

が成り立つ.

定理 3 $\varphi(x)$ を t-ノルム T の加法的生成関数とする. $\psi(x) := \varphi(1-x)$ のとき,

$$S(x,y) = \psi^{-1}(\psi(x) + \psi(y)),$$

は, T と双対な t-コノルムである.

定理 4 ([7]) T が厳密 (連続で狭義単調) な t-ノルムならば, 連続で強単調な関数 $\varphi : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ が存在して, 任意の $x, y \in [0,\ 1]$ に対して

$$T(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y))$$

が成り立つ.

定理 5 $\varphi(x)$ を t-ノルム T の乗法的生成関数とする. $\psi(x) := \varphi(1-x)$ のとき,

$$S(x,y) = \psi^{-1}(\psi(x)\psi(y)),$$

は, T と双対な t-コノルムである.

4 離散ファジィ測度の生成

Dubois と Prade は, ある t-コノルムを用いて, 任意の $A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \phi$ に対して

$$g(A \cup B) = S(g(A), g(B)),$$

が成り立つファジィ測度を, コノルムに基づくファジィ測度と呼んだ.([9][10])

本節では, 適当な t-コノルムの加法的生成関数, 乗法的生成関数を使って確率から導かれるファジィ測度が生成されることを示す.

定理 6 X を有限集合とし, Σ を X の σ-集合体とする. ①ファジィ測度 $g : \Sigma \to [0,\ 1]$ に対してある非減少あるいは非増加なる $[0,\ 1]$ 上の関数 $\eta(x)$, ただし $\eta(0) = 0$ かつ $\eta(1) = 1$ が存在し, 任意の $A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \phi$ に対して

$$g(A \cup B) = \eta^{-1}(\eta(x) + \eta(y))$$

が成り立つとき, g は確率から導かれるファジィ測度である.
② 1 点の測度値 $g(\{x_i\}) = m_j$ をあらかじめ与えると, 上式を満たすファジィ測度 g が構成できる.

証明 ① $f(x) = \eta^{-1}(x)$, $P(A) = \eta \circ g(A)$ とおくと

$$g(A) = f \circ P(A)$$

が成り立ち, $f(x)$ は $[0,\ 1] \to [0,\ 1]$ の非減少関数であり,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \eta \circ g(A \cup B) \\ &= \eta \circ \eta^{-1}(\eta(g(A)) + \eta(g(B))) \\ &= P(A) + P(B), \end{aligned}$$

かつ, $P(\phi) = \eta \circ g(\phi) = 0$, $P(1) = \eta \circ g(X) = 1$ より, P は確率測度である.
② $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ に対して

$$g(A) = \eta^{-1}(\eta(m_1) + \eta(m_2) + \ldots + \eta(m_k))$$

で g が定まる.

定義 6 より, 適当な加法的生成関数を定めることにより, 確率から導かれるファジィ測度を生成することができることがわかる.

[例]$\eta(x) = x^p,\ p > 0$ とすると,

$$g(A \cup B) = \sqrt[p]{g(A)^p + g(B)^p}$$

なるファジィ測度が生成される.

定理 7 X を有限集合とし, Σ を X の σ-集合体とする.
①ファジィ測度 $g : \Sigma \to [0,\ 1]$ に対してある非減少あるいは非増加なる $[0,\ 1]$ 上の関数 $\eta(x)$, ただし $\eta(0) = 1$ かつ $\eta(1) > 0$ が存在し, 任意の $A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \phi$ に対して

$$g(A \cup B) = \eta^{-1}(\eta(g(A))\eta(g(B)))$$

が成り立つとき, g は確率から導かれるファジィ測度である.
② 1 点の測度値 $g(\{x_i\}) = m_j$ をあらかじめ与えると, 上式を満たすファジィ測度 g が構成できる.

証明 ① $P(A) = \log \circ \eta \circ g(A)$, $f(x) = (\log \circ \eta)^{-1}(x)$, ただし log の底は $\eta(1)$, とおくと

$$g(A) = f \circ P(A)$$

が成り立つ. $f(x)$ は $[0,\ 1] \to [0,\ 1]$ の非減少関数であり, $P(A)$ は, $P(\phi) = 0, P(1) = 1$, 任意の $A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \phi$ に対して

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \log \circ \eta \circ g(A \cup B) \\ &= \log\{\eta(g(A)) - \eta(g(B))\} \\ &= \log \circ \eta \circ g(A) + \log \circ \eta \circ g(B) \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

が成り立つので, 確率測度である.
② $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ に対して

$$g(A) = \eta^{-1}(\prod_{i=1}^{k} \eta(m_i))$$

で g が定まる. ただし $\prod$ は積演算である.

定理 7 より, 加法的な場合と同様に, 適当な乗法的生成関数 $\eta(x)$ を定めることにより, 確率から導かれるファジィ測度を生成することができることがわかる.

[例]$\eta(x) = 1 + \lambda x^p\ (\lambda > -1, p > 0)$ とおくと, $\eta(0) = 1,\ \ \eta(1) = 1 + \lambda > 0$. また, $\lambda < 0$ のとき非増加, $\lambda \geq 0$ のき非減少なので条件に合う. 上式に代入すると

$$\begin{aligned} g(A \cup B) &= \eta^{-1}(\eta(x)\eta(y)) \\ &= \sqrt[p]{g(A)^p + g(B)^p + \lambda g(A)^p g(B)^p} \end{aligned}$$

となり, (λ, p)-ファジィ測度が生成される.

5 連続ファジィ測度の生成

4 節の離散ファジィ測度の生成を, 連続ファジィ測度の生成に拡張する.

定理 8 X を集合, Σ を X の σ-集合体, μ を Σ 上の加法的な測度とする. 非減少関数 $\eta : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$, $\eta(0) = 0, \eta(1) = 1$, と, (X, Σ, μ) 上の可測関数 $p(x) : X \to [0,\ 1]$ に対して

$$g(A) = \eta^{-1}(\int_A \eta(p(x))d\mu(x)), A \in X$$

ただし $\int_X \eta(p(x))d\mu(x) = 1$,

とする. このとき, g は確率から導かれるファジィ測度である.

証明 $g(x) = \eta^{-1}(x), P(A) = \int_A \eta(p(x))d\mu(x)$ とおくと, 任意の $A \in \Sigma$ に対して

$$g(A) = f \circ P(A)$$

が成り立ち, $f(x)$ は $[0,\ 1] \to [0,\ 1]$ の非減少関数で, $P(A)$ は有界性と加法性を満たすので, g は確率から導かれるファジィ測度である.

[例] $X = [0,\ 1], \mu = dx$(ルベーグ測度), $p(x) = 1, \eta(x) = x^p$ とおくと

$$f(A) = \sqrt[p]{\int_A x^p dx}$$

が生成される. $f(x) = \sqrt[p]{x}$, $P(A) = \int_A x^p dx$ とおくと,

$$g(A) = f \circ P(A)$$

が成り立つ.

定理 9 X を集合, Σ を X の σ-集合体とし, μ を Σ 上の加法的な測度とする. 単調関数 $\eta : [0,\ 1] \to [0,\ \infty]$, $\eta(0) = 1, \eta(1) > 0$, と, (X, Σ, μ) 上の可測関数 $p(x) : X \to [0,\ 1]$ に対して

$$g(A) = \eta^{-1}(\prod_{x \in A} \eta(p(x)))$$

とおく．ただし $\int_X \eta(p(x))d\mu(x) = 1$ とする．ここに無限積 $\prod$ は (X, Σ, μ) 上の可測関数 $\varphi(x) : X \to [0,\ 1]$ に対して

$$\prod_{x\in A} \varphi(x) = a^{\int_A \varphi(x)d\mu(x)}, a := \eta(1),$$

で定義される．このとき g は確率から導かれるファジィ測度である．

証明　$P(A) = \int_A \eta(p(x))d\mu(x)$,　$f(x) = (\log \circ \eta)^{-1}(x)$,　ただし log の底は $\eta(1)$,　とおくと

$$g(A) = f \circ P(A)$$

が成り立ち, $f(x)$ は $[0,\ 1] \to [0,\ 1]$ の非減少関数であり, $P(A)$ は確率測度である.

[例] $X = [0,\ 1], \mu = dx$(ルベーグ測度), $p(x) = 1$ とおく．離散ファジィ測度と同様に, $\eta(x) := 1 + \lambda x^p$ とすると,

$$\begin{aligned} g(A) &:= \eta^{-1}\Big(\prod_{x\in A} \eta(x)\Big) \\ &= \sqrt[p]{\frac{(1+\lambda)^{\int_A (1+\lambda x^p)dx} - 1}{\lambda}} \end{aligned}$$

になる．この g は (λ, p)-ファジィ測度である．

証明　$A \cap B = \phi$ なる任意の $A, B \in \Sigma$ に対して

$$\begin{aligned} g(A\cup B) &= \sqrt[p]{\frac{(1+\lambda)^{\int_{A\cup B}(1+\lambda x^p)dx} - 1}{\lambda}} \\ &= \sqrt[p]{\frac{(1+\lambda)^{\int_A (1+\lambda x^p)dx + \int_B (1+\lambda x^p)dx} - 1}{\lambda}} \\ &= \sqrt[p]{\frac{(1+\lambda)^{\int_A (1+\lambda x^p)dx}(1+\lambda)^{\int_B (1+\lambda x^p)dx} - 1}{\lambda}} \\ &= \sqrt[p]{g(A)^p + g(B)^p + \lambda g(A)^p g(B)^p} \end{aligned}$$

[計算例] 例えば, $X := [0,\ 1]$ のとき

$$\begin{aligned} g([a,b]) &= \sqrt[p]{\frac{(1+\lambda)^{\int_a^b (\lambda x^p + 1)dx} - 1}{\lambda}} \\ &= \sqrt[p]{\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} + \frac{b-a-1}{\lambda}} \end{aligned}$$

6　まとめと今後の課題

連続ファジィ測度に関しても, 離散の場合と同様に, 生成関数を用いて確率から導かれるファジィ測度を生成できることを確認した.

今後の課題は, 連続も含め, より一般的な生成法の確立及び, 応用の分野に役立つような様々なファジィ測度のクラスを生成することである.

REFERENCES

[1] 浅居喜代治, ファジィ経営科学入門, オーム社,1992.

[2] M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey, in M.M. Gupta, G.N. Saridis, and B.R. Gains, editors, Fuzzy automata and decision processes, pp. 89-102, North Holland, Amsterdam, 1977.

[3] 寺野寿朗, 浅居喜代治, 菅野道夫共編, 応用ファジィシステム入門, オーム社, 1989.

[4] T. Terano, K. Asai and M. Sugeno, Fuzzy Systems Theory and its Applications, Academic Press, Sandiego, CA 1992(English translation of ファジィシステム入門, オーム社,1987).

[5] Z. Wang and G. J. Klir, Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York and London, 1992.

[6] A. Honda, and Y. Okazaki, Distorted probability generated by triangular norm SCIS&ISIS 2006 (Joint 3rd International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems and 7th International Symposium on advanced Intelligent Systems), September,20-24,2006, Tokyo, Japan

[7] B. Schweizer and A. Sklar, Associative functions and statistical triangle inequalities, Publ. Math. Debrecen, 8, 169-186, 1961.

[8] M. Grabisch, T. Murofushi, and M. Sugeno, eds., Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications, Physica-Verlag, 2000.

[9] 中島　信之, t-ノルムの全て, 三恵社, 2001.

[10] D. Dubois and H. Prade, A class of fuzzy measures based on triangular borms, Int. J. General Systems, 8, 43-61, 1982.

[お問合せ先]
〒 820-8502
飯塚市川津 680 番 4
九州工業大学情報工学部情報科学専攻岡崎研究室
津村 拓朗
e-mail : takurou@oz.ces.kyutech.ac.jp