離散ファジイ測度のパラメータ族の構成と相対エントロピー基準による同定

岩本 貴宏，本田 あおい，岡崎 悦明

九州工業大学・情報工学部・システム創成情報工学科

Takahiro IWAMOTO，Aoi HONDA，Yoshiaki OKAZAKI

Department of Systems Innovation and Informatics, Kyushu Institute of Technology

Abstract: A new class of fuzzy measure generated by t-norm, which is called (λ ,p)-fuzzy measure is constructed. We also proposed a new method of identification of fuzzy measure which is based on the relative entropy. We show an example of the identification of fuzzy measure using our proposed method.

1　はじめに

社会情勢の複雑化にともない，意思決定が困難になっている．これまでに意思決定支援システムとして，ファジィ測度を利用したファジィAHP にが研究されてきた．ここで問題となるのは，全ての事象の測度値があらかじめ判っている場合はほとんど無いことである．そのため一部の既知測度値から未知の測度値を推定する必要が生じる．

本論文では，より高い精度での同定を目的とし，新しいファジィ測度のクラスの構成法と相対エントロピー基準による同定法を提案する．

2　準備

本論文を通して，X を有限集合, n を X の要素の個数, 2^X を X のべき集合とする．また, 誤解を与えない範囲で集合を表す中括弧 $\{\cdot\}$ やコンマを省略 (例えば 2 点集合 $\{x_1, x_2\}$ を x_1x_2 と書く) する．

定義 1 (ファジィ測度 [2]) 集合関数 $\nu : 2^X \to [0,\ 1]$ が次の条件を満たすとき, ν をファジィ測度という．

1. $\nu(\emptyset) = 0,\ \nu(X) = 1$
2. 任意の $A, B \in 2^X$ に対して $A \subset B$ ならば $\nu(A) \leq \nu(B)$

1 は有界性条件, 2 は単調性条件をあらわす. 加法性は仮定しないので $g(A) \cup g(B) > g(A) + g(B)$(優加法性) や $g(A \cup B) < g(A) + g(B)$(劣加法性) が起こりうる.

次に, 可能性測度，λ-ファジィ測度の定義を示す.

定義 2 (可能性測度) ファジィ測度 g が次の性質を持つとき，g を可能性測度という.

$$\sup\{\pi(x) | x \in X\} = 1$$

を満たす関数 $\pi : X \to [0, 1]$ が存在して

$$g(A) = \sup\{\pi(x) | x \in A\}$$

ただし $\sup \pi(\phi) = 0$.

定義 3 (λ-ファジィ測度) ファジィ測度 g_λ が次の性質を持つとき，g_λ を λ-ファジィ測度という.
任意の $A, B \in 2^X, A \cap B = \phi$ に対して

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B) \qquad (1)$$

$$-1 < \lambda < \infty$$

λ-ファジィ測度の持つ (1) の性質を λ-加法性という.

定義 4 (確率測度) $P : 2^X \to [0, 1]$ が次の条件を満たすとき，P を確率測度という．任意の $A, B \in 2^X, A \cap B = \phi$ が存在して,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

定義 5 (確率から導かれるファジィ測度) 2^X 上のファジィ測度 g が，ある確率測度 P と非減少関数 $f : [0, 1] \to [0, 1]$ によって $g(A) = f \circ P(A), \forall A \in 2^X$ と表されるとき，g を確率から導かれるファジィ測度と呼ぶ.

定義 6 (t-ノルム) 演算 $T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ が次の条件を満たすとき，これを t-ノルムと呼ぶ.

(T-1) $T(0,0)=0, T(x,1)=x$ for $x>0$
(T-2) $x \leq y$ ならば $T(x,z) \leq T(y,z)$
(T-3) $T(x,y)=T(y,x)$
(T-4) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$

定義 7 (t-コノルム) 演算 $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ が次の条件を満たすとき，これを t-コノルムと呼ぶ．
(T-1') $S(1,1)=1, S(x,0)=x$ for $x<1$
(T-2)，(T-3)，(T-4) は，t-ノルムと同様である．

3 確率から導かれるファジィ測度の生成

定理 1 ([6]) T が厳密（連続で狭義単調) な t-ノルムならば，連続で強単調な関数 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ が存在して，任意の $a,b\in[0,1]$ に対して

$$T(a,b)=\varphi^{-1}(\varphi(a)*\varphi(b))$$

が成り立つ．

この時 $\varphi(x)$ を t-ノルムの乗法的生成関数と呼ぶ．t-コノルムに関しても，次の定理で成り立つ．

定理 2 $\varphi(x)$ を t-ノルムの乗法的生成関数とする時

$$S(x,y):=\psi^{-1}(\psi(x)\psi(y))$$

ただし $\psi(x):=\varphi(1-x)$

定理 1 及び定理 2 は，適切な生成関数を選ぶことで，t-ノルムと t-コノルムを生成出来ることを主張している．この生成方法を利用して確率から導かれるファジィ測度を生成できる．

定義 8 ν がファジィ測度で，[0,1] 上で連続で非減少または非増加の関数 η が存在し，$1\eta(0)=1,\eta(1)>0$ の時以下の条件を満たす ν は確率から導かれるファジィ測度である．

$$\nu(A\cup B)=\eta^{-1}(\eta(\nu(A))\eta(\nu(B)))$$

確率から導かれるファジィ測度の場合はノルムやコノルムの場合と違い，η は $[0,1]\to[0,1]$ である必要は無い．

定義 9 ([5])($(\lambda,p)-$ファジィ測度) ファジィ測度 ν_λ が次の性質を持つとき，ν_λ を $(\lambda,p)-$ファジィ測度という．任意の $A,B\in 2^X$,$A\cap B=\phi$ に対して

$$\nu(A\cup B)=\sqrt[p]{g(A)^p+g(B)^p+\lambda g(A)^p g(B)^p}$$

ただし $0<p\leq\infty$,$-1<\lambda<\infty$.

例 1 以下の方法で $(\lambda,p)-$ ファジィ測度を得ることができる．$\eta(x):=\lambda x^p+1, 0<p,\lambda>-1$ と置く．$\eta(0)=1,\eta(1)=\lambda+1>0$, 区間 [0,1] で $\eta(x)$ は非減少または非増加となり，$\eta'(x)=\lambda p x^{p-1}$ である．これより以下の式が得られる．

$$\begin{aligned}\nu(A\cup B) &= \eta^{-1}(\eta(\nu(A))\eta(\nu(B))) \\ &= \sqrt[p]{\nu(A)^p+\nu(B)^p+\lambda\nu(A)^p\nu(B)^p}\end{aligned}$$

よってファジィ測度 ν は確率から導かれるファジィ測度であり，$P(A),f(x)$ は，それぞれ以下の通りとなる．

$$\begin{aligned}P(A) &:= \log_t(\lambda\nu(A)^p+1) \\ f(x) &:= \eta^{-1}\circ\log^{-1}_{1+\lambda}(x)=\sqrt[p]{\frac{(\lambda+1)^x-1}{\lambda}}\end{aligned}$$

定理 3 $p=1$ の時 (λ,p)-ファジィ測度は λ-ファジィ測度となる．$p=\infty$ の時 (λ,p)-ファジィ測度は可能性測度となる．

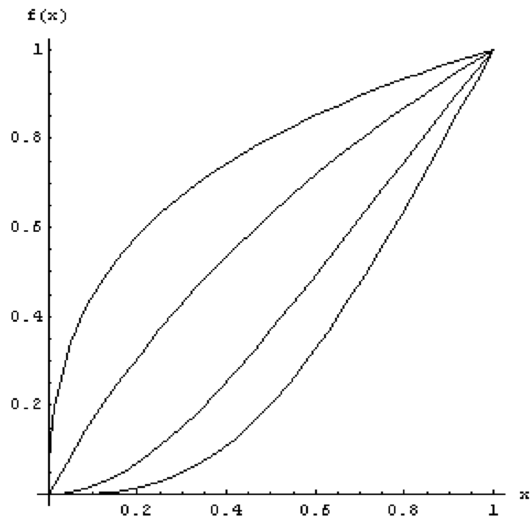

図 1: $f(x)$ のグラフ．$\lambda=2,p=0.5,1,2,3$

定理 4 ν を (λ,p)-ファジィ測度とする．ν は $A,B\in 2^X$ 優加法性と劣加法性を同時に表す事ができる．

証明 $p=2$ と置くと，$\lambda\nu(A)\nu(B)\geq 2$ の時 $\nu(A\cup B)\geq\nu(A)+\nu(B)$ となり，$\lambda\nu(A)\nu(B)$ の時 $\nu(A\cup B)\leq\nu(A)+\nu(B)$ となる．

4 ファジィ測度の同定

この章では同定に用いた相対エントロピーについて述べ，(λ,p)-ファジィ測度と λ-ファジィ測度を比較する．

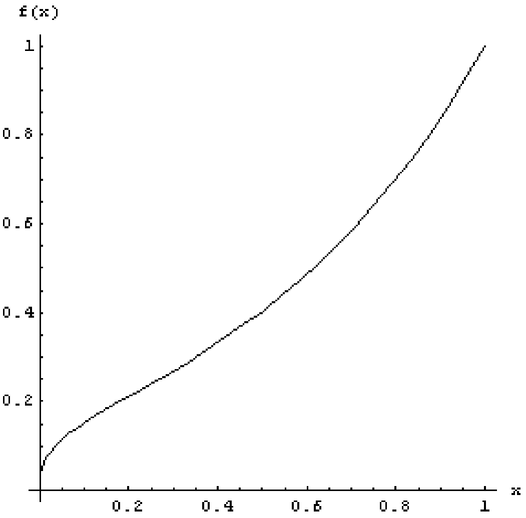

図 2: $f(x)$ のグラフ．$\lambda = 200, p = 3$

4.1　相対エントロピー

定義 10 (相対エントロピー [4]) u, v を $(X, 2^X)$ 上のファジィ測度とする．このとき v の u に対する相対エントロピーは次のように定義される．

$$H(v;u) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{A \subseteq X \setminus \{x_i\}} \gamma_{|A|}^{n} h[v(A, x_i); u(A, x_i)],$$

ただし $v(A, x_i) := v(A \cup \{x_i\}) - v(A), u(A, x_i) := u(A \cup \{x_i\}) - u(A), h(x;y) = x \log \frac{x}{y}$，$r_k^n := \frac{(n-k-1)!k!}{n!}$.

命題 1 ([4]) $(X, 2^X)$ 上の任意のファジィ測度 v, u に対して $H(v;u) \geq 0$ が成り立ち，$H(v;u) = 0$ の時に限り $v \equiv u$ である．また，$v, u (v \neq u)$ に対して v_α^u： $\alpha u + (1-\alpha) v$ とする．このとき $H(v_\alpha^u; u)$ は $0 < \alpha < 1$ に対して狭義の減少関数である．

定義 11 (maximal chain) 集合 $A, B \in \mathcal{A}$ に対して,$A \subsetneq B$, かつ $C \in \mathcal{A}$ について，$A \subseteq C \subsetneq B$ ならば $C = A$ が成り立つとき A は B に cover されているといい，$A \prec B$ と書く．このとき $C = (c_0, c_1, \ldots, c_m)$ が $\phi = c_0 \prec c_1 \prec \cdots \prec c_m = X, c_i \in \mathcal{A}, i = 0, \ldots, m$ を満たすとき，C を $\mathcal{A}$ の maximal chain とよぶ.
$\mathcal{A}$ の maximal chain 全体を $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ と書く．

v を (X, A) 上のファジィ測度とする．このとき $C := (c_0, c_1, \ldots, c_m) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ に対して $p^{v,C}$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} p^{v,C} : &= (p_1^{v,C}, p_2^{v,C}, \ldots, p_m^{v,C}) \\ &= (v(c_1) - v(c_0), v(c_2) - v(c_1), \\ &\quad \ldots, v(c_m) - v(c_{m-1})) \end{aligned}$$

$p^{v,C}$ について $p_i^{v,C} \geq 0, i = 1, \ldots, m$ と

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^{v,C} = 1$$

が成り立つ.

$p^{v,C}$ を用いて，ファジィ測度の相対エントロピーは次のように別表現を与えることができる．

定義 12 v, u を $(X, 2^X)$ 上のファジィ測度，$H(v;u)$ を v の u に対する相対エントロピーは次のように定義される．

$$H(v;u) = \frac{1}{|\mathcal{M}(2^X)|} \sum_{C \in \mathcal{M}(2^X)} H_x(p^{v,C}; p^{u,C}),$$

ただし，X 上の確率測度 $p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n)$ に対して

$$H_s(p;q) := \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i}.$$

4.2　ファジィ測度の同定

被験者 A にアルバイトを選ぶときの評価項目を答えてもらったところ，以下のようになった．評価項目 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{$ 場所，拘束時間，仕事内容，給料 $\}$ それぞれの重視度は表 1 の通りである．例えば $x_1 x_2$ が 0.15 というのは $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 全体の重視度を 1 とすると，場所と拘束時間を 0.25 重視するという意味である．

表１：被験者 A の回答

x_1	x_2	x_3	x_4
0.05	0.10	0.10	0.20
x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_2x_3
0.15	0.20	0.30	0.25
x_2x_4	x_3x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$
0.40	0.45	0.50	0.70
$x_1x_3x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$	
0.75	0.90	1.00	

被験者 A の回答，すなわち評価尺度を ν とおき，ν と λ-ファジィ測度，(λ, p)-ファジィ測度のクラスと比較したものが表 2 である．$H(\nu; u_\theta)$ を最小にする $\theta = \hat{\theta}$ の値とそのときの $H(v; u_\theta)$ を示す．

表２：各クラスにおける $H(\nu; u_{\hat{\theta}})$ の値

クラス	$H(\nu; u_{\hat{\theta}})$	$\hat{\theta}$ の値
λ-ファジィ測度	0.0140	$\lambda = 5.04$
(λ, p)-ファジィ測度	0.00819	$\lambda = 2.82, p = 0.76$

表３：$H^{\mathcal{A}}(v;u)$ の値と θ の推定値

クラス	$H^{\mathcal{A}}(v;u)$	θ の推定値	$\hat{u}(\{x_1\})$	$\hat{u}(\{x_2\})$	$\hat{u}(\{x_3\})$	$\hat{u}(\{x_4\})$
λ-ファジィ測度	5.74×10^{-3}	$\lambda = 5.77$	0.052	0.099	0.157	0.200
(λ, p)-ファジィ測度	3.82×10^{-3}	$\lambda = 3.11, p = 0.81$	0.039	0.082	0.134	0.179

表４：推定結果

クラス	$\hat{u}(x_1x_3)$	$\hat{u}(x_2x_3)$	$\hat{u}(x_3x_4)$	$\hat{u}(x_1x_2x_4)$	$\hat{u}(x_2x_3x_4)$
λ-ファジィ測度	0.179	0.258	0.415	0.585	0.755
(λ, p)-ファジィ測度	0.208	0.300	0.473	0.726	0.931

表５：$H(v;\hat{v})$ の値

クラス	$H(v;\hat{v})$
λ-ファジィ測度	1.43×10^{-2}
(λ, p)-ファジィ測度	9.36×10^{-3}

次に被験者 A の回答のうち $x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_1x_4, x_2x_4, x_1x_2x_3, x_1x_3x_4, X$ のみが既知であると仮定し，これらの既知データを元に残りを推定することを考える．$\mathcal{A} := \{\phi, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_1x_4, x_2x_4, x_1x_2x_3, x_1x_3x_4, X\}, |\mathcal{M}(\mathcal{A})| = 8$ である．$H^{\mathcal{A}}(v;u) := \frac{1}{|\mathcal{M}(\mathcal{A})|}\sum_{C\in\mathcal{M}(\mathcal{A})} H_s(p^{v,C}; p^{u,C})$ を最小とする u を v の同定結果とする．相対エントロピーを用いてファジィ測度を同定した結果を表 3 に，同定したファジィ測度から得た未知データの推定値 $\hat{v}$ を表 4 に示す．ただし

$$\hat{v}(A) := \begin{cases} \hat{u}(A), & A \in \mathcal{A} \\ v(A), & A \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

である．推定した値を用いて $H(v;\hat{v})$ を計算した結果が表 5 である．

(λ, p)-ファジィ測度はパラメータを 2 つ持つため，$H(v;u_\theta)$ の小さいパラメータを選ぶことができる．今回は (λ, p)-ファジィ測度の方が λ-ファジィ測度より良い結果を得られた，ただし理論的にはパラメータが多いほうがより精密な近似ができるはずであるが，その分極値も増えることになり数値解法で最適解が得られない場合も考えられる．

5　まとめと今後の課題

相対エントロピー基準の新しいファジィ測度の同定法を提案した．また λ ファジィ測度をより自由度の高い (λ, p)-ファジィ測度に拡張し，このクラスを用いることにより精密な近似ができることを確認した．

今後の課題は，より多くのクラスを作成し，状況に応じたクラスの使い分けを検討する事である．

参考文献

[1] 浅居喜代治, ファジィ経営科学入門, オーム社,1992.

[2] M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey, in M.M. Gupta, G.N. Saridis, and B.R. Gains, editors, Fuzzy automata and decision processes, pp. 89-102, North Holland, Amsterdam, 1977.

[3] 寺野寿朗, 浅居喜代治, 菅野道夫共編, 応用ファジィシステム入門, オーム社, 1989.

[4] A.Honda and M.Grabisch, Entropy of capacities on lattices. Information Sciences, Information Siences,176,3472-3489,2006.

[5] A. Honda, and Y. Okazaki,Distorted probability generated by triangular norm SCIS&ISIS 2006 (Joint 3rd International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems and 7th International Symposium on advanced Intelligent Systems), September,20-24,2006, Tokyo, Japan.

[6] B. Schweizer and A. Sklar, Associative functions and statistical triangle inequalities, Publ. Math. Debrecen, 8, 169-186, 1961.

[7] 中島　信之, t-ノルムの全て, 三恵社，2001.

[連絡先]
〒 820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4
九州工業大学情報工学研究科
情報科学専攻　岡崎研究室
岩本 貴宏
e-mail：moso@oz.ces.kyutech.ac.jp