2次元ファジィ測度と distortion

Fuzzy Measures of Two Dimensions and Distortion

山上　純児，本田　あおい（九州工業大学大学院 情報工学研究科）
Junji YAMAGAMI，Aoi HONDA（Kyushu Institute of Technology）

abstract

Let μ be a fuzzy measure of two dimensions. Let g be a fuzzy measure. Then g is called a distortion of μ if there exists a non-decreasing function $f : [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ satisfying that $g = f\circ\mu$. We shall introduce the μ-invariance related to the distortion property of g.

1　はじめに

$\square=[0,1]\times[0,1]$は順序$\le$が与えられた順序集合とする．(X,β)を測度空間とし，□に値をとる集合関数$\mu=(\mu_1,\mu_2)$：$\beta\to\square$を考える．μが 2 次元ファジィ測度とは，$\mu(\phi)=(0,0)$，$\mu(X)=(1,1)$かつ$A\subset B\Rightarrow\mu(A)\le\mu(B)$なることである．2 変数非減少関数　$f(x,y)$：$\square\to[0,1]$は$g(A)=f(\mu(A))=f(\mu_1(A),\mu_2(A))$により通常のファジィ測度$g$を導く．

本講演では，2 次元に値をとるファジィ測度を導入し，その distortion について考察する．

2　ファジィ測度の不変性と distortion

以下，Xを空でない集合，βをX上のσ-algebra とする．

定義 1　ファジィ測度（fuzzy measure）

集合関数g：$\beta\to[0,1]$が次の条件を満たすとき，gをファジィ測度という：

1. $g(\phi)=0$　，$g(X)=1$　，
2. $\forall A,B\in\beta, A\subset B\Rightarrow g(A)\le g(B)$　．

以下，g,μをX上の 1 次元ファジィ測度とする．

定義 2　不変性

(ｉ) g,μが次の条件を満たす時，gは強-μ-不変であるという：

$$\mu(A)\ge\mu(B)\Rightarrow g(A)\ge g(B)\quad.$$

(ii) g,μが次の条件を満たす時，gは弱-μ-不変であるという：

$$\mu(A)=\mu(B)\Rightarrow g(A)=g(B)\quad.$$

補題 1

g,μについてgが強-μ-不変であれば，gは弱-μ-不変である．

証明

$\mu(A)=\mu(B)$と仮定し，$\mu(A)\le\mu(B)$であり，$\mu(A)\ge\mu(B)$であるとする．

gが強-μ-不変であるので，$g(A)\le g(B)$となり，$g(A)\ge g(B)$となる．以上から$g(A)=g(B)$となる．

定義 3　漸近不変性

（ｉ）g, μ が次の条件を満たす時，g は強漸近-μ-不変であるという：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mu(A_n)-\mu(B_n)\right)\geq 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(g(A_n)-g(B_n)\right)\geq 0 \quad .$$

（ⅱ）g, μ が次の条件を満たす時，g は弱漸近-μ-不変であるという：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mu(A_n)-\mu(B_n)\right)= 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(g(A_n)-g(B_n)\right)= 0 \quad .$$

定義 4　distorted probability

g, μ について,ある非減少関数 $f : [0,1]\to[0,1]$ が存在し、g が次のように表せるとき、g を μ の distortion という.

$$g(A)= f\circ\mu(A)= f(\mu(A)),\quad \forall A\in\beta$$

特に，μ が確率測度であるとき，g を μ の distorted probability と呼ぶ。また，このときの関数 f を scaling function という.

定理 1

g, μ について，g が強-μ-不変ならば，g は μ の distortion である.

証明

μ の値域を $R(\mu)$ とおく．すなわち

$$R(\mu)\equiv\{\mu(A)\mid A\in\beta\} \quad .$$

$f : [0,1]\to[0,1]$ を次のように定義する.

$$f : R(\mu)\to R(g)$$
$$f(\mu(A)) := g(A) \quad .$$

仮定より g は強-μ-不変であるので，補題 1 より，g が強-μ-不変であれば，g は弱-μ-不変である．このとき

$$t=\mu(A)=\mu(B)\in R(\mu)$$

とすれば，g が弱-μ-不変であるから

$$g(A)=g(B) \quad .$$

つまり

$$f(t)= f(\mu(A))= f(\mu(B))$$

となる.

よって f は well-defined である.

仮定より g は強-μ-不変

$$\mu(A)\geq\mu(B)\Rightarrow g(A)\geq g(B)$$

であるので，f は $R(\mu)$ 上で非減少である.

次に、f を $[0,1]$ 上へ拡張する.

$\forall t\in[0,1]$ に対して

$$f(t)=\inf\{f(\mu(A))\mid t\leq\mu(A), A\in\beta\}$$
$$=\inf\{f(s)\mid t\leq s, s\in R(\mu)\}$$

とおく. そのとき f は非減少で $f:[0,1]\to[0,1]$，かつ

$$g(A)= f(\mu(A)),\quad \forall A\in\beta \quad .$$

したがって，g が強-μ-不変ならば，g は μ の distortion である.

3　2次元ファジィ測度

定義 5　2次元ファジィ測度

（fuzzy measure　of two dimensions）

　$\square = [0,1] \times [0,1]$ は順序 $\le$ が与えられた順序集合とする．(X, β) を測度空間とし，$\square$ に値をとる集合関数 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ ： $\beta \to \square$ を考える．

　μ が次の条件を満たすとき，2次元ファジィ測度またはベクトル値ファジィ測度という：

1.　$\mu(\phi) = (0,0)$，　$\mu(X) = (1,1)$
2.　$\forall A, B \in \beta,\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$　.

以下，μ を X 上の2次元ファジィ測度とする．g を通常のファジィ測度とするとき，μ -不変性等は§2と同様に定義する．

定理 2

　ファジィ測度 g，2次元ファジィ測度 μ について，g が強- μ -不変ならば，g は μ の distortion である．

証明

　μ の値域を $R'(\mu)$ とおく．すなわち

$$R'(\mu) \equiv \{\mu(A) \mid A \in \beta\}\quad .$$

f ： $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ を次のように定義する．

$$f\ :\ R'(\mu) \to R'(g)$$
$$f(\mu(A)) := g(A)\quad .$$

　仮定より g は強- μ -不変であるので，補題1より，g が強- μ -不変であれば，g は弱- μ -不変である．このとき

$$(s,t) = \mu(A) = \mu(B) \in R'(\mu)$$

ならば，g が弱- μ -不変であるから

$$g(A) = g(B)\quad .$$

よって

$$f(s,t) = f(\mu(A)) = f(\mu(B))$$

となる．

　よって f は well-defined である．

　仮定より g は強- μ -不変

$$\mu(A) \ge \mu(B) \Rightarrow g(A) \ge g(B)$$

であるから，f は $R'(\mu)$ 上で順序不変である．

　f を $\square$ 上へ拡張する．

　$\forall (s,t) \in \square$ とするとき

$$\begin{aligned} f(s,t) &= \inf\{f(\mu(A)) \mid (s,t) \le \mu(A), A \in \beta\} \\ &= \inf\{f(v) \mid (s,t) \le v, v \in R'(\mu)\} \end{aligned}$$

とおく．そのとき f は順序不変で

$$g(A) = f(\mu(A)),\quad \forall A \in \beta\quad .$$

である．

　何故なら任意の (s,t)，(u,v) において

$$f(s,t) = \inf\{f(\mu(A)) \mid (s,t) \le \mu(A), A \in \beta\}$$
$$f(u,v) = \inf\{f(\mu(B)) \mid (u,v) \le \mu(B), B \in \beta\}$$

となる．

　このとき，$(s,t) \le (u,v)$ とすると

$$\begin{aligned} &\{f(\mu(A)) \mid (s,t) \le \mu(A), A \in \beta\} \\ &\qquad \supset \{f(\mu(B)) \mid (u,v) \le \mu(B), B \in \beta\} \end{aligned}$$

であり，

$$f(s,t) \le f(u,v)$$

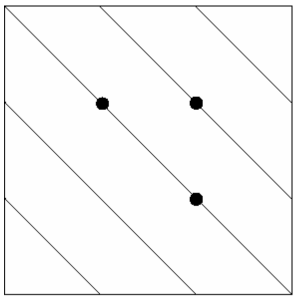
となる．

　よって $(s,t) \le (u,v)$ ならば $f(s,t) \le f(u,v)$ である．

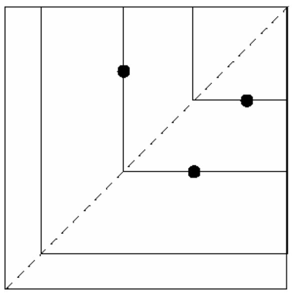
4　順序の例

順序の例を以下に示す。

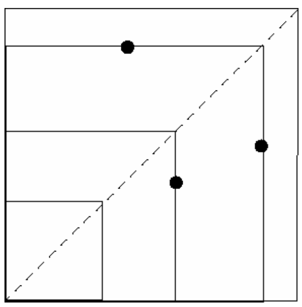
(1)　$(x,y) \le (u,v) \overset{def}{\Leftrightarrow} x + y \le u + v$



(2)　$(x,y) \le (u,v) \overset{def}{\Leftrightarrow} \min\{x,y\} \le \min\{u,v\}$



(3)　$(x,y) \le (u,v) \overset{def}{\Leftrightarrow} \max\{x,y\} \le \max\{u,v\}$

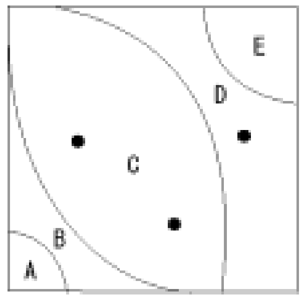


(4)　辞書式順序

$$(x,y) \le (u,v) \overset{def}{\Leftrightarrow} x \le u, y \le v$$

(5)　分割による順序

$A \le B \le C \le D \le E$ と定義する．



(6)　$(x,y) \le (u,v) \overset{def}{\Leftrightarrow} x^p + y^p \le u^p + v^p$

注意

$\mu : \beta \to [0,1] \times [0,1]$ をベクトル値ファジィ順序とする． $\mu(A) = (\mu_1(A), \mu_2(A))$ とおくとき，各 $\mu_i(A)$ は必ずしも通常の実数値ファジィ測度とはならない．順序≤が辞書式順序ならば各 $\mu_i(A)$ はファジィ測度である．

5　おわりに

本講演では，2 次元に値をとるファジィ測度を導入し，その distortion について考察を行なった．

今後の課題として以下のようなものが挙げられる．

（課題 1）

ベクトル値ファジィ測度に関するファジィ積分とその性質はどの様になるか？

（課題 2）

人の価値判断の尺度は多様であり，ベクトル値ファジィ測度 $\mu(A)$ と考えてみよう．しかし，実際に評価するときは, 何らかの scaling　$f(x,y)$ により，通常のファジィ測度 $f(\mu(A))$ として実数値化して考えるという状況が考えられる．

（課題 3）

g が強漸近-μ-不変のとき，g は μ の distortion であるが，このとき scaling function $f(x,y)$ は $[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 連続関数にとれるのか？

順序の入れ方により連続にとれる場合があるのか？

参考文献

[1] 浅居喜代治，ファジィ経営科学入門，オーム社，1992.

[2] 日本ファジィ学会編，講座ファジィ 3 ファジィ測度，日刊工業新聞社，1993.

[3] Aoi Honda and Yoshiaki Okazaki , INVARIANCE OF FUZZY MEASURE , Bulletin of the Kyushu Institute of Technology Pure and Applied Mathematics No.46，1999.

連絡先

九州工業大学大学院　情報工学研究科

情報科学専攻　制御システム工学分野

岡崎研究室　　山上　純児

E-mail：junji@oz.ces.kyutech.ac.jp