ファジィエントロピーとその応用
Fuzzy entropy and its application

本田あおい 岡崎悦明 (九州工業大学情報工学部)
柳研二郎 (山口大学理学部)

Aoi Honda, Yoshiaki Okazaki (Kyushu Institute of Technology),
Kenjiro Yanagi (Yamaguchi University)

Abstract. In this talk, we introduce a fuzzy entropy. It is an extension of original entropy defined on probability measure. We discuss on a kind of quality of subjective evaluation with fuzzy entropy.

1 準備

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を空でない有限集合, n を X の要素の数, (X) を X のべき集合とする.

定義 1. (ファジィ測度)
集合関数 $\mu : (X) \to [0,\ 1]$ が次の条件を満たすとき μ はファジィ測度とよばれる.

1. $\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(X) = 1$ (有界性).
2. 任意の $A, B \in (X)$ に対して $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ が成り立つ (単調性).

定義 2. (ショケ積分)
$f : \Omega \to I\!R$ について次のように定義される積分をショケ積分という.

$$(c)\int f(x)d\mu := \int_{I\!R} \mu(\{x | f(x) > r\})dr.$$

定義 3. (Shapley 値)
X 上のファジィ測度 μ に対して次のように定義される値をShapley 値という. 任意の $A \in (X)$ に対して

$$s(A) = \sum_{S \subset X} \gamma(S)[\mu(S) - \mu(S \setminus A)]$$

ただし

$$\gamma(S) = \frac{1}{n!}(|S| - 1)! \cdot (|X| - |S|)!$$

とする.

事実 1. 1 点集合の Shapley 値の和は1 である. すなわち

$$\sum_{x \in X} s(x) = 1$$

が成り立つ.

事実 2. Shapley 値はファジィ測度である.

定義 4. (エントロピー)
$p = \{p_1, p_2 \ldots, p_n\}$, $q = \{q_1, q_2 \ldots, q_n\}$ を X 上の確率分布とする. ただし p_i は x_i が起こる確率で $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$ である. このとき

$$I(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

を p のエントロピー,

$$I(p; q) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i}$$

を q に対する p のエントロピーという.

2 ファジィ測度のエントロピー

通常のエントロピーの拡張として, ファジィ測度のエントロピーを導入する.

定義 5. (ファジィ測度のエントロピー) μ, ν をファジィ測度とし, そのShapley 値をそれぞれ s_μ, s_ν とする. このとき, μ のエントロピーと μ の ν に対する相対エントロピーを次のように定義する.

$$I_1(\mu) = -\sum_{i=1}^{n} s_\mu(\{x_i\}) \log s_\mu(\{x_i\})$$

$$I_2(\mu) = -(c)\int \log s_\mu ds_\mu$$

$$I_1(\mu;\nu) = \sum_{i=1}^{n} s_\mu(\{x_i\}) \log \frac{s_\mu(\{x_i\})}{s_\nu(\{x_i\})}$$

$$I_2(\mu;\nu) = (c)\int \log \frac{s_\mu}{s_\nu} ds_\mu$$

事実 3.

$$I_1(\mu) \quad 0.$$

$$I_2(\mu) \quad 0.$$

事実 4.

$$I_1(\mu;\nu) \quad 0.$$

3 ファジィ測度のエントロピーの応用例

ファジィ測度の応用として, ファジィAHP(Analytic Hierarcky Process) がある. ファジィAHP ではファジィ測度は人間の主観的評価尺度をモデル化したものである. ではファジィ測度のエントロピーを用いて意思決定者の何らかの考え方を定量的に表すことができないだろうか.

問題例 オーディオ機器の購入

A, B, C さんがオーディオ機器を購入する場合の評価基準を以下とする. ただし, $\{x_1, x_2, x_3\}$ の重視度を100 点としたときの他の項目についての重視度である. 評価項目は $x_1 =$「音質」, $x_2 =$「デザイン」, $x_3 =$「メーカー」の3 つである.

1. A さん(バランス志向・優加法的)
2. B さん(音質を非常に重視)
3. C さん(音質かつデザインを重視)
4. D さん(バランス志向・劣加法的)
5. E さん(音質, デザイン, メーカーの順に重視)

表 1: 各人の評価項目の重視度

	x_1	x_2	x_3	x_1, x_2	x_1, x_3	x_2, x_3	X
A	10	10	10	40	40	40	100
B	90	10	10	90	90	20	100
C	10	10	50	90	50	50	100
D	50	50	50	70	70	70	100
E	30	20	10	70	40	20	100

6 人の評価尺度(=ファジィ測度) のShapley 値とエントロピーは表2, 3 の通りである.

表 2: 各人の評価尺度のShapley 値

	x_1	x_2	x_3	x_1, x_2	x_1, x_3	x_2, x_3
A	0.3333	0.3333	0.3333	0.6500	0.6500	0.6500
B	0.8333	0.0833	0.0833	0.9000	0.9000	0.1500
C	0.3333	0.3333	0.3333	0.7000	0.7000	0.7000
D	0.3333	0.3333	0.3333	0.6000	0.6000	0.6000
E	0.5000	0.3500	0.1500	0.8000	0.6000	0.4500

表 3: 各人の評価尺度のエントロピー

	A	B	C	D	E
I_1	1.0986	0.5661	1.0986	1.0986	0.9986
I_2	1.0986	0.5661	1.0986	1.0986	1.0409

$$A = C = D > E > B$$

という順になっている. 評価項目の違いによる重視度の差がない場合, エントロピーは高くなり, 逆に評価項目による違いが大きい場合, エントロピーは低い. また, 評価項目単独での重視度が低い場合でも, 複合項目の重視度が高い場合はその評価項目単独のShapley 値は大きな値となる(C さん). エントロピーはこのShapley 値のバランスを見ているといえる. つまり, エントロピーは評価項目に対する「こだわり(のなさ)」を表しているとみることができる. 二通りのエントロピーの定義 I_1, I_2 のうちどちらが優れているのかはわからない.

次に, 相対エントロピーを計算する. (表4,5) 例えば, A さんに対する相対エントロピーは

$$A = C = D < E < B$$

となっている. ファジィ測度の値で, E さん, D さんをA さんと比較するとE さんの方がA さんに近いが, 実際はD さんの方がA さんに近いと考えるのが妥当であろう. このように, ファジィ測度のエントロ

表 4: 相対エントロピー I_1

	$I_1(\cdot;\mu_A)$	$I_1(\cdot;\mu_B)$	$I_1(\cdot;\mu_C)$	$I_1(\cdot;\mu_D)$	$I_1(\cdot;\mu_E)$
A	0	0.6188	0	0	0.1148
B	0.5325	0	0.7090	0.5020	0.2571
C	0	0.6188	0	0	0.1148
D	0	0.6188	0	0	0.1148
E	0.1000	0.3350	0.2392	0.1000	0

表 5: 相対エントロピー I_2

	$I_2(\cdot;\mu_A)$	$I_2(\cdot;\mu_B)$	$I_2(\cdot;\mu_C)$	$I_2(\cdot;\mu_D)$	$I_2(\cdot;\mu_E)$
A	0	0.5325	0	0	−0.0694
B	0.5804	0	0.6955	0.4653	0.2801
C	0	0.5325	0	0	−0.0270
D	0	0.5325	0	0	−0.1118
E	0.1088	−0.4490	0.1266	0.0910	0

ピーは意思決定者の考え方の近さを表現しているのではないだろうか. ここでも二通りの定義 I_1, I_2 のうちのどちらが優れているかわからない. I_2 はショケ積分を使った, ファジィ測度らしい定義になっている. また, I_1 では $I_1(\mu_A;\mu_E)$, $I_1(\mu_C;\mu_E)$, $I_1(\mu_D;\mu_E)$ の差がでないのに対して I_2 では差が出ている. しかし I_2 のとる値は非負とは限らない. このことから判断すると I_1 の方が優れているだろうか.

参考文献

[1] 菅野道夫, 室伏俊明,「ファジィ測度」, 日刊工業新聞社, 1993

問い合わせ先

〒820-8502
飯塚市大字川津680-4 九州工業大学
情報工学部制御システム工学科　本田あおい
Phone 0948-29-7730
Fax 0948-29-7709
E-mail aoi@ces.kyutech.ac.jp