

D.A. Davey, H.A. Priestley 著

「Introduction to Lattices and Order」

- ・ 出版社名： Cambridge University Press
- ・ 2002年 5月発行
- ・ ISBN-13： 9780521784511
- ・ ISBN-10： 0521784514
- ・ 第2版 大きさ 2Sub 版 298頁 5,601円

本田 あおい(評)

九州工業大学 情報工学部

物事を比較して順序付けするというを我々は日常的に行っている。ある性質をもつ物の集合は、その性質の大小で順序づけを行うことができたり、あるいは比較できない物同士が存在することもあるだろう。

本書は順序・束の初学者向けの好適書である。順序集合とは順序関係を満たす二項関係の定まった集合、束とは順序集合の中でもある種の演算の定まった代数系である。順序や束を用いて要素間の関係を抽象化することが色々な応用を持つことがわかってきた。現在、数学の他の分野や、計算機科学、論理回路設計、言語学を始めとした様々な分野で利用されている。本書の特徴は、順序・束の解説のみならず、応用についても多くのページを割いていることであろう。これは応用例を学習のモチベーションにしてほしいという筆者らの教育的配慮でもある。読者には数学科の学部生・大学院生、及び関連分野の専門家を想定しており、丁寧な解説や、図を適度に配置する等、初学者にとって親切的な構成になっている。章の順番や構成も十分に考えられており、予備知識は線形代数あるいは離散数学の基本的な知識だけで十分である。定理の証明を省略せずに全て載せてあるのと、章末の練習問題で理解度が確認できるので、自習に用いても困ることはないだろう¹。

本書の構成は以下の通りである。

1. Ordered sets(順序集合)。順序集合の導入。
2. Lattices and complete lattice(束及び完備束)。束、代数的概念の導入。応用の上で重要な完備束の解説。

3. Formal concept analysis(形式概念分析)。形式概念分析とは完備束を用いたデータ分析である。形式概念分析の始まりは1982年の Rudolf Wille の論文とされているが、1990年発行の第一版で既に1つの章を当てていることから、著者らが束論の応用として注目していることがわかる。

4. Modular, distributive and Boolean lattices(モジュラ束、分配束、ブール束)。これらは重要な束であり、様々に応用されている。

5. Representation: the finite case(表現定理:有限束の場合)。表現とは束の同型対応のことである。同型な束を用いて数学の諸概念を束へと適用することができる。ここでは、分配束の表現を与える Birkhoff の表現定理などを紹介している。

6. Congruences(合同性)。合同性は束論の中でも中心的な役割を果たす。束の要素間の同値関係によって準同型な束を対応させることができる。ここでは合同の基本的概念及び性質を扱っている。

7. Complete lattices and Galois connections(完備束とガロア接続)。2章で導入した完備束についてさらなる議論を行う。閉包とガロア接続を利用して、完備束と topped \cap -structure との関係等について述べる。

8. CPOs and fixpoint theorems(CPOと不動点定理)。解析学において至る所に現れる不動点定理がここにも登場する。主に完備部分順序集合に関する不動点定理について議論する。

9. Domains and information systems(ドメインと情報システム)。順序集合が計算機科学に応用される際に、その仲介的役割を果たすのがドメインである。ドメインを用いた計算機科学への応用について述べている。

10. Maximality principles(最大性原理)。選択公理と Zorn の補題が扱われている。

11. Representation: the general case(表現定理:一般の場合)。表現定理を一般の場合へと拡張する。

数年前、Grabisch 氏(パリ第一大学)に束論のよい入門書だと勧められたのが本書との出会いである。それ以来論文執筆や査読等の必要な際にはいつも役に立っている。興味のある皆さんに是非ともお勧めしたい。

1 練習問題の解答は掲載されていない。